

距離空間とHausdorff空間のあいだのコンパクト部分集合を保つ単射の連続性について

1. 距離空間からHausdorff空間に向けての単射の場合 (連続になる)

【命題】

距離空間 X 、Hausdorff空間 Y 、およびコンパクト部分集合をコンパクト部分集合にうつす単射 $f: X \rightarrow Y$ が与えられたとき、 f は連続である。

距離空間 X において、写像が連続であることは「点列連続性」と同値です。したがって、 X 内の任意の収束する点列 $x_n \rightarrow x$ に対して、 Y において $f(x_n) \rightarrow f(x)$ となることを示せば十分です。

【証明】

- X において $x_n \rightarrow x$ となる点列をとります。このとき、点列とその極限からなる集合 $K = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ は X のコンパクト部分集合です。
- 仮定より、 f はコンパクト集合をコンパクト集合に写すため、像 $f(K)$ は Y のコンパクト部分集合となります。
- ここで、結論である $f(x_n) \rightarrow f(x)$ を背理法で示します。
もし収束しないと仮定すると、 $f(x)$ のある開近傍 V と、 (x_n) の部分列が存在して、その部分列のすべての項が V の外に存在することになります。(表記を簡略化するため、この部分列を改めて (x_n) と置きます。つまり、すべての n で $f(x_n) \notin V$ と仮定して話を進めます。)
- 集合 $C = f(K) \setminus V$ を考えます。 Y はHausdorff空間なので、コンパクト集合 $f(K)$ は閉集合です。 V は開集合なので、 C は $f(K)$ の閉部分集合となり、 C 自身もコンパクトになります。
- 前述の仮定により、点列 $\{f(x_n)\}$ はすべてコンパクト空間 C に含まれます。コンパクト空間内の無限点列は少なくとも1つの集積点(極限点)を持つため、 $\{f(x_n)\}$ の集積点の1つを $y \in C$ とします。

6. $y \in C$ であり、 $f(x) \notin C$ なので $y \neq f(x)$ です。 f は単射であるため、ある自然数 m が存在して $y = f(x_m)$ となります。
7. ここで、元の集合から1点を除いた集合 $K_m = K \setminus \{x_m\}$ を考えます。 $x_n \rightarrow x$ である事実には変わりはないため、 K_m は依然として X のコンパクト集合です。
8. 仮定より $f(K_m)$ は Y のコンパクト集合であり、 Y がHausdorff空間であることから $f(K_m)$ は Y における閉集合となります。
9. y は点列 $\{f(x_n)\}$ の集積点であり、除外した $f(x_m)$ 以外のすべての項は $f(K_m)$ に含まれています。したがって、 y は閉集合 $f(K_m)$ の閉包に含まれるため、 $y \in f(K_m)$ となります。
10. しかし、 $y = f(x_m)$ であり、 f は単射であるため、 $f(x_m) \notin f(K_m)$ とならなければなりません。これは矛盾です。
11. したがって、背理法の仮定は誤りであり、 $f(x_n) \rightarrow f(x)$ が成り立つことが示されました。よって f は連続です。■

2. Hausdorff空間から距離空間に向けての単射の場合 (反例あり)

【構成する反例の概要】

Hausdorff空間 X から距離空間 Y への単射で、コンパクト集合をコンパクト集合にうつすが、連続ではない写像 f の例を構成します。

具体的には、「コンパクト集合が有限集合のみとなるような、通常の位相より細かい位相を入れた実数空間」を X とし、通常の距離位相を入れた実数空間を Y として、特定の点 $(x = 0, 1)$ でのみ値が入れ替わって不連続となる関数 f を考えます。

逆方向の $f: X \rightarrow Y$ (X がHausdorff、 Y が距離空間) では連続になりません。詳細な構成は以下の通りです。

【空間と写像の構成】

- **定義域 X :** 実数全体 \mathbb{R} に対して、通常の位相より細かい以下の位相を与えた空間とし

ます。

ある部分集合 U が X の開集合であるとは、通常の実数空間 \mathbb{R} における開集合 O と、ある可算集合 C を用いて $U = O \setminus C$ と表せることと定義します。

- **終域 Y** : 通常の実数空間 \mathbb{R} （距離空間）とします。
- **写像 $f: X \rightarrow Y$** : $f(0) = 1$ 、 $f(1) = 0$ とし、それ以外の x については $f(x) = x$ とする単射関数とします。

条件を満たすことの確認

1. X はHausdorff空間である

X の位相は通常の実数空間 \mathbb{R} の位相よりも細かい（開集合が多い）ため、通常の実数空間が持つHausdorff性をそのまま受け継ぎます。

2. コンパクト部分集合をコンパクト部分集合にうつす

まず、 X におけるコンパクト集合は**有限集合のみ**であることを示します。

もし X に無限個の点を持つコンパクト集合 K が存在したとすると、その中に可算無限部分集合 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ がとれます。ここで、 X の開被覆として $O_0 = X \setminus A$ と $O_n = X \setminus (A \setminus \{a_n\})$ を考えます（補集合が可算なので、これらは X においてすべて開集合です）。これらは K を完全に被覆しますが、どの有限部分被覆をとっても A の要素を有限個しか覆うことができず、 K 全体を覆うことができないため、コンパクト性に矛盾します。

したがって、 X のコンパクト集合は有限集合に限られます。 f がどのような写像であれ、有限集合は有限集合に写されます。そして Y （通常の実数空間 \mathbb{R} ）において有限集合は常にコンパクトです。よってこの条件は満たされます。

3. f は連続ではない

$x = 0$ における連続性を確認します。 $f(0) = 1$ です。

Y における1の開近傍として $V = (1/2, 3/2)$ をとります。この V の f による逆像は $f^{-1}(V) = \{0\} \cup ((1/2, 3/2) \setminus \{1\})$ となります。

もし f が連続であれば、これは X の開集合になるはずですが、開集合であると仮定すると、定義から通常の実数空間 \mathbb{R} の開集合 O と可算集合 C が存在して、 $0 \in O \setminus C \subseteq f^{-1}(V)$ となります。 $0 \in O$ なので、 O は微小な区間 $(-\epsilon, \epsilon)$ を含みます。しかし、 ϵ を十分に小さく取ると $(-\epsilon, \epsilon)$ は $(1/2, 3/2)$ と一切交わりません。

したがって、 $(-\epsilon, \epsilon) \setminus C \subseteq \{0\}$ とならざるを得ません。これは、非可算な要素を持つ区間 $(-\epsilon, \epsilon)$ が、高々可算な集合 $C \cup \{0\}$ に完全に含まれることを意味し、明確な矛盾です。

よって逆像は X で開集合ではなく、 f は連続ではありません。

3. 定義した位相が実際に位相の公理を満たすことの証明

反例で定義した「通常の開集合から可算集合を除いたもの」の全体が、実際に位相の公理を満たすことを確認します。新たに定義する部分集合の族を \mathcal{O} とおきます。

定義:

$$\mathcal{O} = \{O \setminus C \mid O \text{ は } \mathbb{R} \text{ の通常の開集合, } C \text{ は可算集合}\}$$

公理1：全体集合と空集合が含まれること

$\mathbb{R} \in \mathcal{O}$ および $\emptyset \in \mathcal{O}$ を示します。

- $\mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \emptyset$ と表せます。 \mathbb{R} は通常の開集合であり、空集合 \emptyset は有限集合（可算集合の一種）なので、 $\mathbb{R} \in \mathcal{O}$ です。
- $\emptyset = \emptyset \setminus \emptyset$ と表せます。 \emptyset は通常の開集合であり、空集合は可算なので、 $\emptyset \in \mathcal{O}$ です。

公理2：有限個の共通部分が含まれること

$U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ ならば $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$ を示します。

定義より、 $U_1 = O_1 \setminus C_1$ 、 $U_2 = O_2 \setminus C_2$ と書けます（ O_1, O_2 は通常の開集合、 C_1, C_2 は可算集合）。このとき、共通部分は集合の演算により以下のように変形できます。

$$U_1 \cap U_2 = (O_1 \setminus C_1) \cap (O_2 \setminus C_2) = (O_1 \cap O_2) \setminus (C_1 \cup C_2)$$

- $O_1 \cap O_2$ は通常の開集合の有限交叉なので、通常の開集合です。
- $C_1 \cup C_2$ は可算集合同士の有限和なので、可算集合です。

したがって、 $U_1 \cap U_2$ も「通常の開集合 \setminus 可算集合」の形をしているため、 $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$ となります。数学的帰納法により、任意の有限個の共通部分についても成り立ちます。

公理3：任意個の和集合が含まれること（最重要ポイント）

\mathcal{O} の任意の元からなる族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、その和集合 $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が \mathcal{O} に含まれることを示します。

各 U_λ は $U_\lambda = O_\lambda \setminus C_\lambda$ と表せます。ここで、通常の開集合の和集合 $O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ を考えます。通常有位相の公理から、 O は通常の開集合です。

$U \subseteq O$ であるため、 $C = O \setminus U$ とおいたとき、 C が可算集合になることを示せば、 $U = O \setminus C$ となり証明が完了します。

1. リンデレーフ性の適用

\mathbb{R} の通常有位相は第二可算公理を満たすため、リンデレーフ空間です。したがって、任意の開被覆から可算部分被覆を取り出すことができます。

開集合 O は $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の和集合ですが、リンデレーフ性により、その中から可算個の $\{O_{\lambda_n}\}_{n=1}^\infty$ を選んで、 $O = \bigcup_{n=1}^\infty O_{\lambda_n}$ とすることができます。

2. C が可算であることの証明

任意の要素 $x \in C$ をとります。 $C = O \setminus U$ なので、「 $x \in O$ 」かつ「 $x \notin U$ 」です。

- $x \in O$ なので、先ほどの可算部分被覆のどれか、ある k について $x \in O_{\lambda_k}$ となります。
- 一方で $x \notin U$ なので、すべての λ について $x \notin U_\lambda$ です。当然 $x \notin U_{\lambda_k}$ です。
- $U_{\lambda_k} = O_{\lambda_k} \setminus C_{\lambda_k}$ であり、 $x \in O_{\lambda_k}$ なのに $x \notin U_{\lambda_k}$ であるということは、除外された集合の中に x があること、すなわち $x \in C_{\lambda_k}$ を意味します。

以上より、 C の任意の要素 x は、可算個の C_{λ_n} のどれかに必ず含まれることとなります。つまり、

$$C \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty C_{\lambda_n}$$

となります。可算集合の可算和はまた可算集合であるため、右辺は可算集合です。その部分集合である C も可算集合となります。

よって、 $U = O \setminus C$ (O は通常の開集合、 C は可算集合) と表せるため、 $U \in \mathcal{O}$ が示されました。

以上の3つの公理を満たすため、 \mathcal{O} は確かに \mathbb{R} 上の位相を定めていることが証明されました。